# *Les suites*

## *1. Savoir*

### *1.1. Généralités*

| | *Suite arithmétique* | *Suite géométrique* |
|---|---|---|
| *Définition* | $U_{n+1} = U_n + r$ | $U_{n+1} = q\ U_n$ |
| *Raison* | R | q |
| *Relation entre les termes* | $U_n = U_0 + nr$<br>$U_n = U_p + (n-p)r$ | $U_n = q^n\ U_0$<br>$U_n = q^{n-p}\ U_p$ |
| *Somme (de $U_0$ à $U_n$)* | $(n+1)\ \frac{U_0+U_n}{2}$ | $U_0\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$<br>$(q \neq 1)$ |
| *Limite* | • Si r > 0, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$<br>• Si r < 0, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ | • Si $\|q\|<1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$<br>• Si $\|q\|>1$, alors U diverge |
| *Démonstration* | Si $U_{n+1} - U_n = a$ ($a \in \mathbb{R}$), alors U est une suite arithmétique de raison a | Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ ($q \in \mathbb{R}$), alors U est une suite géométrique de raison q |

## 1.2. Vocabulaire

### 1.2.1. Sens de variation

$U_n$ est strictement croissante ⇔ pour tout n : $U_n < U_{n+1}$
$U_n$ est croissante ⇔ pour tout n : $U_n \leq U_{n+1}$
$U_n$ est strictement décroissante ⇔ pour tout n : $U_n > U_{n+1}$
$U_n$ est décroissante ⇔ pour tout n : $U_n \geq U_{n+1}$
$U_n$ est constante ⇔ pour tout n : $U_n = U_{n+1}$

### 1.2.2. Bornes

La suite $U_n$ est majorée par M si pour tout n : $U_n \leq M$
La suite $U_n$ est minorée si pour tout n : $U_n \geq m$
La suite $U_n$ est bornée si elle est majorée et minorée.

## 1.3. Démonstration par récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $P_n$ est vraie pour tout naturel n,

- on vérifie que la propriété $P_0$ est vraie
- on démontre que si $P_n$ est vraie alors $P_{n+1}$ est vraie

La propriété est alors vraie pour tout n.

## 1.4. Convergence - divergence

### 1.4.1. Convergence

Une suite U est convergente si elle admet une limite finie.
Toute suite convergente est bornée.
Toute suite croissante et majorée est convergente
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Deux suites $U_n$ et $V_n$ sont adjacentes ⇔

- $U_n$ est croissante
- $V_n$ est décroissante
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

Si deux suites $U_n$ et $V_n$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite.

### 1.4.2. Divergence

Une suite est divergente ⇔ elle n'admet pas de limite ou si elle admet une limite infinie.

Toute suite non convergente est divergente.


*Yves Romani – yves.romani@live.fr*

# *2. Savoir-faire*

## *2.1. Reconnaître une suite arithmétique et calculer la somme de ses termes*

Soit la suite $U_n = U_{n-1} + 4$ avec $U_0 = 0$.
1) Calculer $U_1, U_2,$ et $U_3$
2) Démontrer que $U_n$ est une suite arithmétique et en déterminer la raison.
3) Calculer la somme des termes de $U_0$ à $U_{100}$.

*Corrigé :*

1) $U_1 = U_0+4 = 4$
$U_2 = U_0+ 2 \times 4 = 8$
$U_3 = U_0+3 \times 4 = 12$

2) $U_{n+1} - U_n = \cancel{U_n}+4-\cancel{U_n} = 4$
*On a donc une suite arithmétique de raison 4.*

3) *Calculons d'abord* $U_{100}$ *:*

$$U_n = U_0 + nr$$
$$U_{100} = U_0+100\times4 = 400$$

*Calculons maintenant la somme :*

$$\sum_{0}^{100} U_n = (n+1)\,\frac{U_0+U_n}{2} = (100+1)\,\frac{0+400}{2} = 20\,200$$

## *2.2. Reconnaître une suite géométrique et calculer la somme de ses termes*

Soit la suite $U_n = 2U_{n-1}$ avec $U_0 = 1$.
1) Calculer $U_1, U_2,$ et $U_3$
2) Démontrer que $U_n$ est une suite géométrique et en déterminer la raison.
3) Calculer la somme des termes de $U_0$ à $U_{32}$.

*Corrigé :*

1) $U_1 = 2U_0 = 2$
$U_2 = 2^2\,U_0 = 4$
$U_3 = 2^3\,U_0 = 8$

2) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2U_n}{U_n} = 2$
*On a donc une suite géométrique de raison 2.*

3) *Calculons d'abord* $U_{32}$ *:*

$$U_n = q^n\,U_0$$

$$U_{32} = 2^{32} \times 1 = 4\,294\,967\,296$$

*Calculons maintenant la somme :*

$$\sum_{0}^{32} U_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-2^{32}}{1-2} = 8\,589\,934\,591$$

## 2.3. Déterminer le sens de variation d'une suite

Soit $U_n$ la suite définie par $U_n = n(n-1)$ avec $n \in \mathbb{N}$
Etudier son sens de variation.

*Corrigé :*

*Pour tout n on a : $U_n = n(n-1)$, donc $U_{n+1} - U_n = n(n+1) - n(n-1) = n^2+n-(n^2-n) = 2n$*
*Comme $n \in \mathbb{N}$, $2n \geq 0$, donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$.*
*$U_n$ est donc croissante.*

## 2.4. Savoir borner une suite

Soit $U_n$ la suite définie par $U_n = 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $U_n$ est minorée par $\frac{-3}{2}$ et majorée par $\frac{3}{2}$.

*Corrigé :*

*Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{-1}{2} \leq \left(\frac{-1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{4}$*

*Donc : $\frac{-3}{2} \leq 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n \leq \frac{3}{4}$ or $\frac{3}{4} \leq \frac{3}{2}$*

*Ainsi : $\frac{-3}{2} \leq 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n \leq \frac{3}{2}$*

*$U_n$ est donc minorée par $\frac{-3}{2}$ et majorée par $\frac{3}{2}$. Elle est bornée.*

## 2.5. Déterminer la convergence d'une suite

Soit $U_n$ une suite avec $n \in \mathbb{N}$ telle que $0 \leq |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Montrer que $U_n$ converge vers $\alpha$.


Yves Romani – yves.romani@live.fr

*Corrigé :*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad donc \quad \lim_{n \to +\infty} |U_n - \alpha| = 0$$

*$U_n$ converge donc vers $\alpha$.*

*2.6. Démontrer par récurrence*

Soit $U_n$ une suite définie par $U_{n+1} = 1 + \left(\frac{1}{U_n}\right)$ avec $U_0 = 1$.
Montrer par récurrence que pour tout nombre entier n on a $U_n \geq 1$.

*Corrigé :*

*Soit $P_n$ la propriété « $U_n \geq 1$ »*
*Comme $U_0 = 1$ alors $P_0$ est vraie.*
*Supposons $U_n \geq 1$ pour un entier n fixé. Alors $\frac{1}{U_n} \geq 0$ ; donc $1 + \left(\frac{1}{U_n}\right) \geq 1$. Ce qui équivaut à dire que $U_{n+1} \geq 1$.*
*$P_n$ vraie implique donc $P_{n+1}$ vraie, on peut donc affirmer par récurrence que $U_n \geq 1$ est vraie pour tout n.*